Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- clasa a XI -a
9 februarie 2025
Barem evaluare și de notare

Subiectul I

Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$.

a) Arătați că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA) \cdot x + \det A, \forall x \in \mathbb{C}$, unde TrA reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A.

b) Dacă $TrA = 2$ și $\det A = 3$, atunci $2\det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4$.

Soluție și barem :

a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a,b,c,d $\in \mathbb{C}$.

$\det(A - xI_2) = (a - x)(d - x) - bc = x^2 - (a + d)x + ad - bc$ **3p**

b) Din punctul a) și din ipoteză, obținem $\det(A - xI_2) = x^2 - 2x + 3$

Folosind Hamilton – Cayley avem $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2 \Longrightarrow A^2 + 3I_2 = 2A$ **1p**

Așadar $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 4\det A = 12$ **1p**

Cum $A^2 + I_2 = 2A - 3I_2 + I_2 = 2(A - I_2)$

Obținem $\det(A^2 + I_2) = 2^2 \det(A - I_2) = 8$ **1p**

În final avem $2\det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4$ **1p**

Subiectul al II-lea

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ pentru care $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = \dfrac{1 + \sqrt{1 + x_n^2}}{n}, \forall n \geq 0$.

a) Arătați că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sqrt{3}$.

b) Determinați $x_0 > 0$ pentru care șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_n = 2^n(x_n - \sqrt{3})$ este convergent.

(G.M. nr.10/2024)

<u>Soluție și barem :</u>

a) Se consideră funcția $f:(0;\frac{\pi}{2})\to(0;\infty)$, $f(x)=tg\ x$. Funcția f este bijectivă, deci pentru $x_0>0$ există un unic $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$ astfel încât $x_0=tg\ \alpha$.

$$x_1=\frac{1+\sqrt{1+x_0^2}}{x_0}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\frac{\alpha}{2}=tg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$$ **1p**

$$x_2=tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)$$

$x_3=tg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{24}-\frac{\alpha}{8}\right)$ și se demonstrează prin inducție matematică egalitatea

$x_n=tg\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6\cdot(-2)^{n-1}}+\frac{\alpha}{(-2)^n}\right)$, pentru orice $n\geq 0$ **1p**

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}tg\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)=\sqrt{3}$$ **1p**

b) $a_n=2^n\left(tg\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)-tg\frac{\pi}{3}\right)$, se aplică

$tgx-tgy=\left[tg(x-y)\right](1+tgx\cdot tgy)$ și se ajunge la

$$a_n=2^n tg\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)\left(1+tg\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)\cdot tg\frac{\pi}{3}\right)$$

$$a_n=2^n\frac{tg\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)\left(1+tg\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)\cdot tg\frac{\pi}{3}\right)$$

$$a_n=\frac{tg\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha}\left((-1)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{3}+(-1)^n\cdot\alpha\right)\left(1+tg\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)\cdot tg\frac{\pi}{3}\right)$$

1p

$$\lim_{n\to\infty}\frac{tg\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha}=1;\lim_{n\to\infty}\left(1+tg\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\alpha\right)\cdot tg\frac{\pi}{3}\right)=4$$ **1p**

Șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent dacă și numai dacă există $\lim_{n\to\infty}\left((-1)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{3}+(-1)^n\cdot\alpha\right)$ și este finită.

$y_n=\left((-1)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{3}+(-1)^n\cdot\alpha\right)=(-1)^{n-1}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

Pentru $\frac{\pi}{3}-\alpha\neq 0$ șirul $(y_n)_{n\geq 0}$ conține subșirurile $(y_{2n})_{n\geq 0}$ și $(y_{2n+1})_{n\geq 0}$ cu limite diferite,

$y_{2n}=(-1)\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ și $y_{2n+1}=\frac{\pi}{3}-\alpha$, deci șirul $(y_n)_{n\geq 0}$ nu este convergent. **1p**

Pentru $\frac{\pi}{3}-\alpha=0$ se obține $y_n=0$ și $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent pentru $x_0=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. **1p**

Subiectul al III-lea

Să se calculeze :

a) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^3-1)}{\sqrt[2024]{5-4x}-1}$;

b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lim_{x\to 0}\frac{(3n+5)^{x^2}-1}{x^3+2x^2}}$.

Soluție și barem :

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^3-1)}{\sqrt[2024]{5-4x}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sin(x^3-1)}{x^3-1}\cdot(x-1)(x^2+x+1)}{\frac{(1+(4-4x))^{\frac{1}{2024}}-1}{4-4x}\cdot(-4)(x-1)}$$ **2p**

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sin(x^3-1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)}{\frac{(1+(4-4x))^{\frac{1}{2024}}-1}{4-4x}\cdot(-4)}=\frac{1\cdot 3}{\frac{1}{2024}\cdot(-4)}=-1518$$ **1p**

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{(3n+5)^{x^2}-1}{x^2(x+2)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{\ln(3n+5)}{2}$$ **1p**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lim_{x\to 0}\frac{(3n+5)^{x^2}-1}{x^3+2x^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln(3n+5)}{2}}$$

Pentru șirul cu termenul general $x_n=\frac{\ln(3n+5)}{2}; x_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$ se aplică Criteriul rădăcinii.

Cum $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\ln(3n+8)}{\ln(3n+5)}=\frac{\ln n+\ln\left(3+\frac{8}{n}\right)}{\ln n+\ln\left(3+\frac{8}{n}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(3+\frac{8}{n}\right)}{1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(3+\frac{8}{n}\right)}$ și $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$, **2p**

se obține că $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln(3n+5)}{2}}=1$. **1p**

<u>Subiectul al IV-lea</u>

Fie $A,B\in M_3(\mathbb{C})$, astfel încât $B^2\neq O_3$, $B^4=O_3$ și $A=B^2+2I_3$.

a) Să se arate că $A^p=2^p\cdot I_3+p\cdot 2^{p-1}\cdot B^2$, pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că, pentru fiecare $p\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, matricea A^p-A^{p-1} este inversabilă.

<u>Soluție și barem:</u>

a) Deoarece $B^2\cdot I_3=I_3\cdot B^2=B^2$, se poate aplica binomul lui Newton sau inducția matematică pentru a obține rezultatul de la a). **3p**

b) $A^p-A^{p-1}=2^p\cdot I_3+p\cdot 2^{p-1}\cdot B^2-2^{p-1}\cdot I_3-(p-1)\cdot 2^{p-2}\cdot B^2$

$A^p-A^{p-1}=2^{p-1}\cdot I_3+2^{p-2}(p+1)\cdot B^2$ **1p**

$\left(2^{p-1}\cdot I_3+2^{p-2}(p+1)\cdot B^2\right)\left(2^{p-1}\cdot I_3-2^{p-2}(p+1)\cdot B^2\right)=2^{2p-2}\cdot I_3$ **1p**

$\left(2^{p-1}\cdot I_3-2^{p-2}(p+1)\cdot B^2\right)\left(2^{p-1}\cdot I_3+2^{p-2}(p+1)\cdot B^2\right)=2^{2p-2}\cdot I_3$ **1p**

Deci matricea A^p-A^{p-1} este inversabilă și inversa ei este matricea **1p**

$C=\frac{1}{2^{2p-2}}\left(2^{p-1}\cdot I_3-2^{p-2}(p+1)\cdot B^2\right)=\frac{1}{2^{p-1}}\cdot I_3-\frac{1}{2^p}(p+1)\cdot B^2$.