Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- clasa a VIII-a
9 februarie 2025
Barem evaluare și de notare

Subiectul I
Diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor naturale a și b este 1. Arătați că $\frac{a}{2}$ și $\frac{b}{2}$ sunt pătratele a două numere naturale consecutive.

Soluție și barem:

Fie a>b. Cum $m_a > m_g$, atunci $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 1$....................1p

$a + b - 2\sqrt{ab} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 2$....................1p

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \pm\sqrt{2}$. Cum $a > b \Longrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$, deci $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{2}$....................1p

$\sqrt{a} = \sqrt{2} + \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b + 2 + 2\sqrt{2b} \Leftrightarrow a - b - 2 = 2\sqrt{2b}$....................1p

Deoarece $a - \mathrm{b} - 2 \in \mathrm{N}$....................1p

$\Longrightarrow \sqrt{2\mathrm{b}} \in \mathrm{N}$, deci $\mathrm{b} = 2\mathrm{k}^2, \mathrm{k} \in \mathrm{N}$....................1p

Obținem $\frac{\mathrm{b}}{2} = \frac{2\mathrm{k}^2}{2} = \mathrm{k}^2$ și $\frac{\mathrm{a}}{2} = \frac{\mathrm{b}+2+2\sqrt{2\mathrm{b}}}{2} = \frac{2\mathrm{k}^2+2+2\cdot 2\mathrm{k}}{2} = \mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k} + 1 = (\mathrm{k}+1)^2$....................1p

Subiectul al II-lea
Se știe că $25x^2 + 16y^2 - 30x + 16y + 8 = 0$, unde $x \in \mathrm{Z}$ și $y \in \mathrm{Q}$.

a) Care este valoarea numărului x?
b) Care este valoarea absolută a părții întregi a lui y?

Soluție și barem:

Ecuația devine $(5x - 3)^2 + (4y + 2)^2 = 5$....................1p

Cum $(5\mathrm{x} - 3)^2 \in \mathrm{Z}$ și $0 \leq (5\mathrm{x} - 3)^2 \leq 5$, obținem $|5x - 3| \in \{0,1,2\}$....................2p

Cum x ∈ Z, obținem singura soluție x=1....................1p

Atunci $(4y + 2)^2 = 1$....................1p

Deci, $4y + 2 = 1$ sau $4y + 2 = -1$, de unde $y = \frac{-3}{4}$ sau $y = \frac{-1}{4}$....................1p

Partea întreagă a lui y este -1 și valoarea absolută a părții sale întregi este 1....................1p

Subiectul al III-lea

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Notăm cu M și P proiecțiile punctului D pe bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABD$, respectiv $\sphericalangle DBC$. Demonstrați că $MP \parallel (ABC)$.

Soluție și barem:

Fie $DM \cap AB = \{E\}$ și $DP \cap BC = \{F\}$

In ΔDBE avem că BM este bisectoare și înălțime$\Rightarrow$BM mediană$\Rightarrow$ DM=ME........................2p

In ΔDBF avem că BP este bisectoare și înălțime$\Rightarrow$BP mediană$\Rightarrow$ DP=PF.............................2p

Obținem în ΔDEF că MP este linie mijlocie$\Rightarrow$ $MP \parallel EF$...1p

$\left.\begin{matrix} MP \parallel EF \\ EF \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MP \parallel (ABC)$...2p

Subiectul al IV-lea

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și O un punct în interiorul său. Notăm cu M, N și P proiecțiile lui O pe AB, BC și CA. Demonstrați că, dacă V este un punct cu proprietățile

$VO \perp (ABC)$, $AV \perp MP$ și $BV \perp MN$, atunci $CV \perp NP$.

Soluție și barem:

Se demonstrează că $MP \perp (VAO) \Rightarrow MP \perp AO$ 1p

și $MN \perp (BVO) \Rightarrow MN \perp BO$..1p

BMON patrulater inscriptibil, OB diametru și $MN \perp BO$

implică că BO=mediatoarea $[MN]$, deci OM=ON..1p

AMOP patrulater inscriptibil, OA diametru și $MP \perp AO$

implică că AO=mediatoarea $[MP]$, deci OM=OP...1p

Deci, ON=OP în patrulaterul inscriptibil PONC, cu OC diametru, deci $PN \perp CO$...................1p

$\left.\begin{matrix} NP \perp OC \\ NP \perp VO \\ OC, VO \subset (VOC) \\ OC \cap VO = \{O\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow NP \perp (VOC)$, dar $CV \subset (VOC) \Rightarrow NP \perp CV$...2p