Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- clasa a-VII-a
9 februarie 2025
Barem evaluare și de notare

Subiectul I

Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c} \in \mathbb{N}$. Arătați că b este media geometrică a numerelor a și c.

Soluție și barem

$\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c} = k, k \in \mathbb{N} \Longrightarrow a\sqrt{2} + b = k(b\sqrt{2} + c)$ 2p

$a\sqrt{2} + b = kb\sqrt{2} + kc \Longrightarrow a\sqrt{2} - kb\sqrt{2} = kc - b \Longrightarrow \sqrt{2}(a - kb) = kc - b$ 2p

Cum $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Longrightarrow$ egalitatea are loc pentru $a - kb = kc - b = 0$ 2p

$k = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Longrightarrow b^2 = a \cdot c \Longrightarrow b = \sqrt{a \cdot c}.$ 1p

Subiectul II

Fie $A = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c, unde\ a, b, c \in \mathbb{N}$. Știind că $2 \cdot A$ are cu 15 divizori mai mulți decât A, $3 \cdot A$ are cu 21 de divizori mai mulți decât A și că $5 \cdot A$ are cu 35 de divizori mai mulți decât A, arătați că $\sqrt{2025 \cdot A}$ este număr natural.

Soluție și barem

$2 \cdot A = 2^{a+1} \cdot 3^b \cdot 5^c, 3 \cdot A = 2^a \cdot 3^{b+1} \cdot 5^c, 5 \cdot A = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^{c+1} \Longrightarrow$

$(a + 2)(b + 1)(c + 1) = (a + 1)(b + 1)(c + 1) + 15$
$(a + 1)(b + 2)(c + 1) = (a + 1)(b + 1)(c + 1) + 21 \Longrightarrow$
$(a + 1)(b + 1)(c + 2) = (a + 1)(b + 1)(c + 1) + 35$ 2p

$(b + 1)(c + 1) = 15$
$(a + 1)(c + 1) = 21 \Longrightarrow$
$(a + 1)(b + 1) = 35$ 2p

a=6, b=4, c=2 2p

$\sqrt{2025 \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2} = 45 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \in \mathbb{N}$ 1p

Subiectul III

În triunghiul ABC ducem înălțimea AD, D∈ BC și notăm cu M și N mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Știind că punctele A, M, D, N sunt situate pe un cerc aflați măsura unghiului BAC.

Soluție și barem

Patrulaterul AMDN fiind înscris în cerc vom avea

$m(\sphericalangle MAD) = m(\sphericalangle MND) = x$ 1p

$m(\sphericalangle DAN) = m(\sphericalangle DNM) = y$ 1p

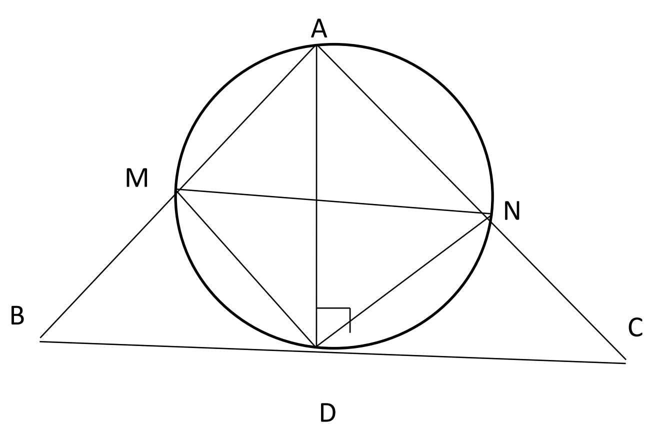
ΔADB este dreptunghic iar MD mediană→ $MD = MA = \frac{AB}{2}$ de unde ΔMAD este isoscel

de bază AD, de unde $m(\sphericalangle MDA) = m(\sphericalangle MAD) = x$

Analog $m(\sphericalangle ADN) = m(\sphericalangle DAN) = y$ 3p

Dar $m(\sphericalangle MAN) + m(\sphericalangle MDN) = 180^\circ$ de unde x+y+x+y=180°,de unde

$m(\sphericalangle BAC) = x + y = 90^\circ$ 2p



Subiectul IV

Se consideră paralelogramul ABCD. Pe laturile AB , CD se construiesc spre exteriorul paralelogramului două triunghiuri echilaterale ABM și CDP, iar pe laturile BC, DA se construiesc spre interiorul paralelogramului triunghiurile echilaterale BCN și DAQ. Arătați că $P_{MNPQ} = 2 \cdot AC + 2 \cdot BD$ (unde prin P_{MNPQ} înțelegem perimetrul patrulaterului MNPQ).

Soluție și barem

$m(\sphericalangle MBD) = 60^0 + m(\sphericalangle ABD)$
$m(\sphericalangle BDP) = 60^0 + m(\sphericalangle BDC) \Rightarrow m(\sphericalangle MBD) = m(\sphericalangle BDP)\ (alt.int.) \Longrightarrow BM \parallel DP$
$m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle BDC)$ **1p**
$BM \parallel DP, [BM] \equiv [DP] \Longrightarrow BMDP\ paralelogram \Longrightarrow$MP are același mijloc cu BD **1p**

$m(\sphericalangle BDQ) = 60^0 - m(\sphericalangle BDA)$
$m(\sphericalangle NBD) = 60^0 - m(\sphericalangle DBC) \Rightarrow m(\sphericalangle BDQ) = m(\sphericalangle NBD)\ (alt.int.) \Longrightarrow BN \parallel DQ$ **1p**
$m(\sphericalangle BDA) = m(\sphericalangle DBC)$
$BN \parallel DQ, [BN] \equiv [DQ] \Longrightarrow BNDQ\ paralelogram \Longrightarrow$NQ are același mijloc cu BD **1p**
Deoarece MP, NQ au același mijloc$\Longrightarrow$ MNPQ paralelogram **1p**
$\Delta MBN \equiv \Delta BAC\ (L.U.L.)\ si\ \Delta AMQ \equiv \Delta ABD\ (L.U.L.) \Longrightarrow MN \equiv AC, MQ \equiv BD \Longrightarrow$
$P_{MNPQ} = 2 \cdot AC + 2 \cdot BD$ **2p**