Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- clasa a V-a
9 februarie 2025
Barem evaluare și de notare

<u>Subiectul I</u>

1. a) Aflați numerele de forma $\overline{a3b}$ știind că a și b sunt cifre distincte care verifică:

$$[3+(a\cdot b+31\cdot 2^{2025}:4^{1011}-201\cdot 3^{2025}:27^{675}):7]\cdot 2+2001=2025$$

b) Scrieți numărul A=2025· 289^{2025} ca o sumă de trei pătrate perfecte.

<u>Soluție și barem :</u>

a) (4 puncte)

$$[3+(a\cdot b+31\cdot 2^{2025}:4^{1011}-201\cdot 3^{2025}:27^{675}):7]\cdot 2+2001=2025$$

Efectuarea operațiilor cu puteri și aducerea la forma $(a\cdot b+248-201):7=9$ **1p**

Determinare a·b=16...**1p**

Determinare a, b cifre distincte (2,8), (8,2) și a numerelor de forma $\overline{a3b}$, 238 și 832...........**2p**

b) (3 puncte)

$2025\cdot 289^{2025}=2025\cdot(17^2)^{2025}=(17^{2025})^2\cdot(40^2+20^2+5^2)$...............................**2p**

$=(40\cdot 17^{2025})^2+(20\cdot 17^{2025})^2+(5\cdot 17^{2025})^2$..**1p**

<u>Subiectul al II-lea</u>

Aflați cel mai mare număr natural cu proprietatea că dacă îl împărțim la 105 obținem restul 29, iar dacă îl împărțim la 21 câtul obținut este un număr de două cifre.

<u>Soluție și barem :</u>

$n=105\,c+29$ și $n=21\,\overline{ab}+r\,, 0\le r<21$ **2p**

$105\,c+29=21\,\overline{ab}+r \iff 29-r=21(\overline{ab}-5c)$ **1p**

Din $0\le r<21$ obținem $29-r\in\{9,10,11,\dots,29\}$ **1p**

Astfel $29-r=21$, adică $r=8$ **1p**

Rezultă $\overline{ab}-5c=1 \iff \overline{ab}-1=5c$. Cum numărul n trebuie să fie maxim, atunci și $\overline{ab}$ maxim, de unde rezultă că $\overline{ab}=96$ **1p**

Obținem $n=21\cdot 96+8=2024$ (și $c=19$) **1p**

Subiectul al III-lea

Se aleg 2025 numere naturale consecutive și se scriu în ordine crescătoare. Se notează cu ***S*** suma ultimelor zece numere din cele 2025 și cu ***s*** suma primelor zece numere. Să se determine cel mai mare numărul natural impar $\overline{ab}$ știind că restul împărțirii numărului ***S-s*** la $\overline{ab}$ este 0.

Soluție și barem :

Fie a, a+1, a+2, ..., a+2024 cele 2025 numere naturale consecutive. **1p**
s=a+(a+1)+(a+2)+.....+(a+9)=10a+45 suma primelor 10 numere **2p**
S=(a+2015)+(a+2016)+........(a+2024)= 10a+$\frac{(2015+2024)\cdot 10}{2}$=10a+20195...................................**2p**
S-s=20150=$2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 31$ **1p**
$\overline{ab}$=5·13=65 este cel mai mare număr impar de două cifre care divide numărul S-s......... ....**1p**

Subiectul al IV-lea

Determinați numerele naturale $\overline{\text{ab}}$ în baza 10, cu proprietatea că $1 + a^a + b^b = \overline{\text{ba}}$.

Soluție și barem:

$\overline{\text{ba}}$< 100, 4^4=256> 100, ………………………………………………………...…....**2p**

a, b cifre nenule, deci a,b∈ {1,2,3}...**1p**

Numerele $\overline{\text{ba}}$ și a^a au aceeași paritate, deci b^b este impar. Numărul b∈ {1, 3}........................**1p**

i) Dacă b=1, a^a=8+a, nu are soluție..**1p**
ii) Dacă b=3, 28+a^a=30+a, a=2...**1p**

$\overline{ab}$=23 soluție unică...**1p**