

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – clasa a IX – a

9 februarie 2025

Barem de evaluare și notare

Problema 1. Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$. Să se arate că:

a) $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + (b + c) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + (a + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) \geq 12;$

b) $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + 3 \geq 2 \cdot \frac{a+b+c}{a \cdot b \cdot c}.$

Soluție și barem:

a) Dacă $x, y > 0$, atunci $x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ și $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}$. Obținem $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$1p

$b + c \geq 2\sqrt{bc}$ și $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 2\sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}}$. Obținem $(b + c) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 4$1p

$a + c \geq 2\sqrt{ac}$ și $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c}}$. Obținem $(a + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) \geq 4$1p

Prin sumare se obține inegalitatea.

b) $x^2+y^2 \geq 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$x^2+y^2+z^2 \geq xy + yz + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$1p

$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + 3 = \left(\frac{1}{a^4} + 1\right) + \left(\frac{1}{b^4} + 1\right) + \left(\frac{1}{c^4} + 1\right) \geq 2 \cdot \frac{1}{a^2} + 2 \cdot \frac{1}{b^2} + 2 \cdot \frac{1}{c^2}$1p

$2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)$1p

$2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc}$

$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + 3 \geq 2 \cdot \frac{a+b+c}{a \cdot b \cdot c}$1p

Problema 2. Să se determine $n \in \mathbb{Z}$, știind că $\left\{ \frac{n^2+4n}{5} \cdot \left\{ \frac{n^2-4n}{5} \right\} \right\} = 0$.

Prin notația $\{a\}$ înțelegem partea fracționară a numărului a .

Soluție și barem:

Deoarece $n \in \mathbb{Z}$, vom analiza cinci cazuri:

1) Dacă $n = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$, ecuația se verifică:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{n^2+4n}{5} \cdot \left\{ \frac{n^2-4n}{5} \right\} \right\} = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \frac{25k^2+20k}{5} \cdot \left\{ \frac{25k^2-20k}{5} \right\} \right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \{(5k^2+4k) \cdot \{5k^2-4k\}\} = 0 \dots\dots\dots 0,5p \\ &\Leftrightarrow \{(5k^2+4k) \cdot 0\} = 0 \text{ (adevărat pentru orice } k \in \mathbb{Z}) \dots\dots\dots 0,5p \end{aligned}$$

2) Dacă $n = 5k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, obținem:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{n^2+4n}{5} \cdot \left\{ \frac{n^2-4n}{5} \right\} \right\} = 0 &\Leftrightarrow \left\{ (5k^2+6k+1) \cdot \left\{ 5k^2-2k-\frac{3}{5} \right\} \right\} = 0 \dots\dots\dots 0,5p \\ &\Leftrightarrow \left\{ (5k^2+6k+1) \cdot \frac{2}{5} \right\} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \frac{2(k+1)}{5} \right\} = 0 \dots\dots\dots 0,5p \\ &\Leftrightarrow 5|(k+1) \Leftrightarrow k = 5t + 4, t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 25t + 21, t \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 0,5p \end{aligned}$$

3) Dacă $n = 5k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, obținem:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{n^2+4n}{5} \cdot \left\{ \frac{n^2-4n}{5} \right\} \right\} = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \left(5k^2+8k+\frac{12}{5} \right) \cdot \left\{ 5k^2-\frac{4}{5} \right\} \right\} = 0 \dots\dots\dots 0,5p \\ &\Leftrightarrow \left\{ \left(5k^2+8k+\frac{12}{5} \right) \cdot \frac{1}{5} \right\} = 0 \dots\dots\dots 0,5p \\ &\Leftrightarrow \left\{ \frac{3(5k+4)}{25} \right\} = 0 \Leftrightarrow \frac{5k+4}{25} \in \mathbb{Z} \text{ (imposibil)} \dots\dots\dots 0,5p \end{aligned}$$

4) Dacă $n = 5k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$, obținem:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{n^2+4n}{5} \cdot \left\{ \frac{n^2-4n}{5} \right\} \right\} = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \left(5k^2+10k+\frac{21}{5} \right) \cdot \left\{ 5k^2+2k-\frac{3}{5} \right\} \right\} = 0 \dots\dots\dots 0,5p \\ &\Leftrightarrow \left\{ \left(5k^2+10k+\frac{21}{5} \right) \cdot \frac{2}{5} \right\} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \frac{42}{25} \right\} = 0 \text{ (fals)} \dots\dots\dots 0,5p \end{aligned}$$

5) Dacă $n = 5k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$, obținem:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{n^2+4n}{5} \cdot \left\{ \frac{n^2-4n}{5} \right\} \right\} = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \left(5k^2+12k+\frac{32}{5} \right) \cdot \{5k^2+4k\} \right\} = 0 \dots\dots\dots 0,5p \\ &\Leftrightarrow \left\{ \left(5k^2+12k+\frac{32}{5} \right) \cdot 0 \right\} = 0 \text{ (adevărat pentru orice } k \in \mathbb{Z}) \dots\dots\dots 0,5p \end{aligned}$$

Deci $n \in \{5k|k \in \mathbb{Z}\} \cup \{25k + 21|k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5k + 4|k \in \mathbb{Z}\} \dots\dots\dots 1p$

Problema 3. Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABQ , BCR și ACS cu centrele C_1 , A_1 , respectiv B_1 . Notăm cu G , G' și G'' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , $A_1B_1C_1$, respectiv QRS . Să se arate că $2\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{G'G''}$.

Soluție și barem:

Fie P un punct oarecare din plan.

$$\left. \begin{aligned} G - \text{centrul de greutate al triunghiului } ABC &\Rightarrow 3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \\ G' - \text{centrul de greutate al triunghiului } A_1B_1C_1 &\Rightarrow 3\overrightarrow{PG'} = \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} \\ G'' - \text{centrul de greutate al triunghiului } QRS &\Rightarrow 3\overrightarrow{PG''} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 2p$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta BCR - \text{echilateral și } A_1 \text{ centrul său} &\Rightarrow \overrightarrow{PA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PR}) \\ \Delta ACS - \text{echilateral și } B_1 \text{ centrul său} &\Rightarrow \overrightarrow{PB_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PS}) \\ \Delta ABQ - \text{echilateral și } C_1 \text{ centrul său} &\Rightarrow \overrightarrow{PC_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PQ}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 2p$$

Obținem:

$$3\overrightarrow{PG'} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}) \dots\dots\dots 1p$$

$$3\overrightarrow{PG'} = \frac{2}{3} \cdot 3\overrightarrow{PG} + \frac{1}{3} \cdot 3\overrightarrow{PG''} \Rightarrow 3\overrightarrow{PG'} = 2\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PG''} \dots\dots\dots 1p$$

$$2\overrightarrow{PG'} - 2\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PG''} - \overrightarrow{PG'} \Rightarrow 2\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{G'G''} \dots\dots\dots 1p$$

Problema 4. Fie triunghiul ABC , I centrul cercului său înscris și D, E, F punctele de contact ale acestuia cu laturile BC, CA, AB . Notăm cu D', E' și F' intersecțiile semidreptelor $(DI, (EI, (FI$ cu cercul înscris în triunghiul ABC și cu H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor $D'EF, E'FD$, respectiv $F'DE$. Arătați că:

- a) $\overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} + \overrightarrow{F'E} = \vec{0}$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral;
- b) triunghiurile $H_1H_2H_3$ și DEF au același centru de greutate.

Supliment Gazeta Matematică, nr. 10/2024

Soluție și barem:

- a) Punctele D și D', E și E' , respectiv F și F' sunt puncte diametral opuse în cercul de centru $I \Rightarrow \overrightarrow{D'I} = \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{E'I} = \overrightarrow{IE}$ și $\overrightarrow{F'I} = \overrightarrow{IF}$1p

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} + \overrightarrow{F'E} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{D'I} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{E'I} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{F'I} + \overrightarrow{IE} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{D'I} + \overrightarrow{ID}) + (\overrightarrow{E'I} + \overrightarrow{IE}) + (\overrightarrow{F'I} + \overrightarrow{IF}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}.....1p \\ &\Leftrightarrow 3\vec{r}_I = \vec{r}_D + \vec{r}_E + \vec{r}_F \end{aligned}$$

Deci I reprezintă atât centrul cercului circumscris ΔDEF , cât și centrul de greutate al ΔDEF . Prin urmare, ΔDEF este echilateral.....1p

ΔDEF echilateral $\Leftrightarrow \Delta ABC$ echilateral:1p

$$\begin{aligned} \text{Dacă } \Delta DEF \text{ echilateral} &\Rightarrow \widehat{FIE} = \widehat{FID} = \widehat{EID} = 120^\circ \\ \text{Patrulatele AFIE, BFID, DIEC inscriptibile} &\left| \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ \right. \\ &\Rightarrow \Delta ABC \text{ echilateral} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dacă } \Delta ABC \text{ echilateral} &\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ \\ \text{Patrulatele AFIE, BFID, DIEC inscriptibile} &\left| \Rightarrow \widehat{FIE} = \widehat{FID} = \widehat{EID} = 120^\circ \right. \\ &\Rightarrow \Delta DEF \text{ echilateral} \end{aligned}$$

- b) D', E', F', D, E, F sunt situate pe același cerc de centru I și aplicând relația lui Sylvester obținem:

$$\begin{aligned} H_1 \text{ ortocentru } \Delta D'EF &\Rightarrow \overrightarrow{IH_1} = \overrightarrow{ID'} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} \\ H_2 \text{ ortocentru } \Delta E'FD &\Rightarrow \overrightarrow{IH_2} = \overrightarrow{IE'} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{ID} \\ H_3 \text{ ortocentru } \Delta F'DE &\Rightarrow \overrightarrow{IH_3} = \overrightarrow{IF'} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE}.....1p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IH_1} + \overrightarrow{IH_2} + \overrightarrow{IH_3} &= (\overrightarrow{ID'} + \overrightarrow{ID}) + (\overrightarrow{IE'} + \overrightarrow{IE}) + (\overrightarrow{IF'} + \overrightarrow{IF}) + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \\ &= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_{H_1}} + \overrightarrow{r_{H_2}} + \overrightarrow{r_{H_3}} - 3\overrightarrow{r_I} &= \overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F} - 3\overrightarrow{r_I} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{r_{H_1}} + \overrightarrow{r_{H_2}} + \overrightarrow{r_{H_3}}) = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F}) \\ &\Rightarrow \Delta H_1 H_2 H_3 \text{ are același centru de greutate cu } \Delta DEF \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$