Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- clasa a X-a
9 februarie 2025
Barem evaluare și de notare

Subiectul I

Demonstrați că:

$$a^{\sqrt{\log_a b}+\sqrt{\log_a c}} + b^{\sqrt{\log_b c}+\sqrt{\log_b a}} + c^{\sqrt{\log_c a}+\sqrt{\log_c b}} \le a^2 + b^2 + c^2,$$

pentru oricare $a, b, c \in (1, \infty)$.

Soluție:

$$a, b, c \in (1, \infty) \Rightarrow \log_a b, \log_a c \in (0, \infty) \qquad (1p)$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\log_a b} \le \tfrac{1+\log_a b}{2} = \log_a \sqrt{ab}\\ \sqrt{\log_a c} \le \tfrac{1+\log_a c}{2} = \log_a \sqrt{ac}\end{aligned}\right\} \overset{a>1}{\Longrightarrow} a^{\sqrt{\log_a b}+\sqrt{\log_a c}} \le a^{\log_a \sqrt{ab}+\log_a \sqrt{ac}} = \sqrt{ab}\cdot\sqrt{ac} \quad (3p)$$

$$\Rightarrow a^{\sqrt{\log_a b}+\sqrt{\log_a c}} + b^{\sqrt{\log_b c}+\sqrt{\log_b a}} + c^{\sqrt{\log_c a}+\sqrt{\log_c b}} \le$$

$$\le \sqrt{ab}\cdot\sqrt{ac} + \sqrt{bc}\cdot\sqrt{ba} + \sqrt{ca}\cdot\sqrt{cb} \le \qquad (2p)$$

$$\le \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{bc}\right)^2 + \left(\sqrt{ca}\right)^2 = ab + bc + ca \le a^2+b^2+c^2. \quad (1p)$$

Subiectul al II-lea

Demonstrați că $|z_1^2| + |z_2^2| + 1 \ge 2 \cdot Re(z_1 + z_2 - z_1 z_2)$, oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Soluție:

$|z_1^2| + |z_2^2| + 1 \ge 2 \cdot Re(z_1 + z_2 - z_1 z_2) \Leftrightarrow |z_1^2| + |z_2^2| + 1 \ge z_1 + z_2 - z_1 z_2 + \overline{z_1} + \overline{z_2} - \overline{z_1 z_2}$
$\Leftrightarrow$ (1p)

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1} + z_1 z_2 + z_2\overline{z_2} + \overline{z_1}\,\overline{z_2} + 1 \ge \overline{z_1} + z_2 + \overline{z_2} + z_1 \Leftrightarrow \qquad (1p)$$

$$\Leftrightarrow z_1(z_2 + \overline{z_1}) + \overline{z_2}(z_2 + \overline{z_1}) - (z_2 + \overline{z_1}) - (z_1 + \overline{z_2} - 1) \ge 0 \Leftrightarrow \qquad (2p)$$

$$\Leftrightarrow (z_2 + \overline{z_1})(z_1 + \overline{z_2} - 1) - (z_1 + \overline{z_2} - 1) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + \overline{z_2} - 1)\overline{(z_1 + \overline{z_2} - 1)} \ge 0 \Leftrightarrow \qquad (2p)$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + \overline{z_2} - 1|^2 \ge 0 \qquad (1p)$$

Subiectul al III-lea

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, oricare două diferite, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_2 + z_3 - z_1|$. Demonstrați că $z_2 + z_3 = 0$.

(S.G.M. noiembrie 2024)

Soluție și barem:

Fie $|z_1| = r$. Avem $r > 0$, altfel numerele ar fi egale.................................1p

Dacă $-z_1 \neq z_2$ și $-z_1 \neq z_3$, atunci punctele de afixe z_2, z_3 și $-z_1$determină un triunghi înscris în C(O,r)..1p

Ortocentrul H al triunghiului are afixul de modul r, deci H∈C(O,r).............1p

Triunghiul este dreptunghic, deci două vârfuri sunt diametral opuse...........1p

Două afixe au suma 0 și singura posibilitate este $z_2 + z_3 = 0$.....................1p

Dacă, de exemplu, avem $-z_1 = z_2$:

$2r = |2 \cdot z_1 - z_3| + |z_3| = |2 \cdot z_1 - z_3 + z_3|$ și numerele sunt nenule, deci $\exists a > 0$ a.î. $2 \cdot z_1 - z_3 = a \cdot z_3$..1p

Aplicând modul obținem a=1 și apoi $z_1 = z_3$, contradicție..........................1p

Subiectul al IV-lea

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ f)(x) = x^5$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că *f* este funcție bijectivă.

b) Demonstrați că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.

Soluție și barem:

a) $f(a) = f(b) \Rightarrow a^5 = b^5 \Rightarrow a = b \Rightarrow$ f injectivă.............................1p

$\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\ \exists x = f(\sqrt[5]{y})$ cu $f(x) = y$, deci f surjectivă..................1p

b) $f(x^5) = f\left(f\left(f(x)\right)\right) = f(x)^5, \forall x \in \mathbb{R}$ 1p

Pentru $a \in \{-1,0,1\}$ avem $f(a)^5 = f(a)$, deci $f(a) \in \{-1,0,1\}$............1p

f injectivă implică $\{f(-1), f(0), f(1)\} = \{-1,0,1\}$................................1p

Dacă $f(-1) = 0$, atunci $-1 = f(0)$ și $f(1) = 1$.

Dacă $f(-1) = 1$, atunci $-1 = f(1)$ și $f(0) = 0$.

În orice caz, există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.............................2p